Lénárt György

Programozás – A programozás matematikai alapjai

NEMZETI SZAKKÉPZÉSI ÉS FELNŐTTKÉPZÉSI INTÉZET

A követelménymodul megnevezése:

Informatikai ismeretek

A követelménymodul száma: 1155-06 A tartalomelem azonosító száma és célcsoportja: SzT-016-50

PROGRAMOZÁS – A PROGRAMOZÁS MATEMATIKAI ALAPJAI

ESETFELVETÉS – MUNKAHELYZET

Ön egy olyan munkahelyen dolgozik, amely számítógéppel végzett tervezési feladatokra szakosodott. A számítógépes tervezést minden esetben előzetes adatok alapján kell elvégezni, amelyek bizonyos számítási készséget igényelnek Öntől.

Ön azt a feladatot kapta, hogy a megadott műszaki rajzokon ellenőrizze a méretek pontosságát és számszaki helyességét.

A számítógéppel támogatott tervezés matematikai alapjai hasznos, fontos információkat tartalmaznak az Ön számára.

A számítási feladatok elvégzése a tervezések alapját képezi.

A fejezetben ismertetésre kerülnek azok a főbb témakörök, amelyeket eddig tanulhatott, és lesznek olyan elemek is, amelyek az újdonság erejével hathatnak.

SZAKMAI INFORMÁCIÓTARTALOM

Az alkalmazott matematikai alapok témakörei:

1. Számhalmazok
2. Logikai alapműveletek és a Boole-algebra alapjai
3. Mátrixok és determinánsok
4. Lineáris egyenletrendszerek megoldása
5. A gráfelmélet alapjai
6. Alapstatisztikai módszerek

1. Számhalmazok

A számhalmazok ismertetése előtt célszerű áttekinteni a halmazok alapvető fogalmait, definíciókat és műveleteket.

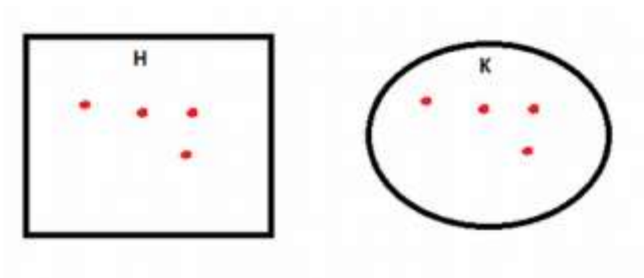
A **halmaz**: bizonyos meghatározott, különböző objektumoknak (dolgoknak) az összességét jelenti.

Általános jelölése: A, B, C stb.

Az elem alapfogalom, külön nem értelmezzük.

Például: számok (1, 2, 3), nevek (Péter, Ilona, Mária), színek (piros, sárga, zöld) stb.

A halmazok szemléltetésére gyakran használunk ábrákat. A halmazokat sematikusan sík tartománnyal (körlapok, téglalapok stb.), a halmaz elemeit pedig pontokkal ábrázolhatjuk. Ezeket az ábrákat **Venn-diagramoknak** nevezzük.



1. ábra. Venn-diagram

A halmaz megadása:

Felsoroljuk az összes alkotó elemét, illetve annyit, amennyi egyértelműen megadja az összes többit is.

Például: A:= {1, 2, 3}

A halmaz elemeit tulajdonságaikkal vagy rájuk vonatkozó összefüggésekkel írjuk le, s a halmaz elemeit jellemző szöveget kapcsos zárójel közé írjuk.

Például: A:= {10-nél kisebb pozitív egész számok}

Definíció: Két halmaz egyenlő, ha ugyanazokból az elemekből áll.

A **H** és **K** halmaz egyenlőségét **H = K** jelöli, ennek tagadását a **H≠K** jelöli.

Definíció: Az olyan halmazt, amelynek nincs eleme, üres halmaznak nevezzük.

Jele: ∅

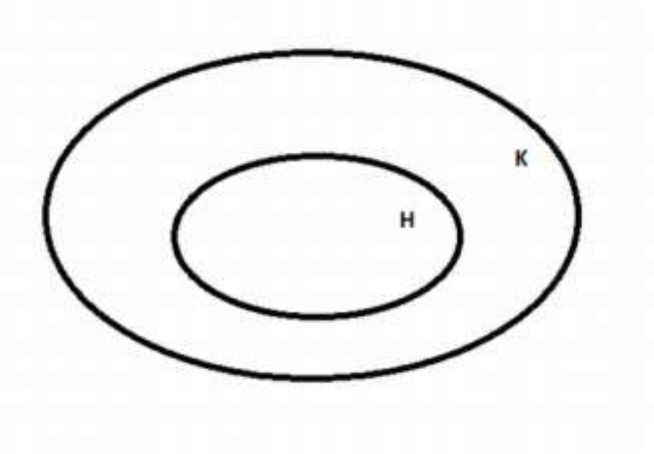
Műveletek halmazokkal:

Definíció: A **H** halmaz a **K** halmaznak részhalmaza, ha **H** minden eleme eleme a **K**-nak is.

Jele: **H⊆K**

Definíció: Ha **H⊆K** és **H≠K**, akkor a **H**-t a **K** valódi részhalmazának nevezzük.

Jele: **H⊂K**



2. ábra. Részhalmaz

Definíció: Egy adott **H** halmaz összes részhalmazai is egy halmazt alkotnak, amelyet a **H** hatványhalmazának nevezünk.

Jele: **P(H)**

Definíció: Két halmaz egyesítettje (uniója) azoknak az elemeknek a halmaza, amelyek az adott halmazok közül legalább az egyikben benne vannak.

Jele: **H∪K**

Például: H:= {1, 2, 4} és K:= {1, 2, 3, 5}, akkor H∪K:= {1, 2, 3, 4, 5}

Halmazok uniójára teljesülnek a következő tulajdonságok:

Minden H, K, L halmazra

H∪K = K∪H (kommutativitás),

(H∪K)∪L = H∪(K∪L) (asszociativitás),

H∪H = H (idempotencia).

Definíció: Két halmaz metszete (közös része) azoknak az elemeknek a halmaza, amelyek az adott halmazok mindegyikében benne vannak.

Jele: **H∩K**

Például: H:= {1, 2, 4} és K:= {1, 2, 3, 5}, akkor H∩K:= {1, 2}

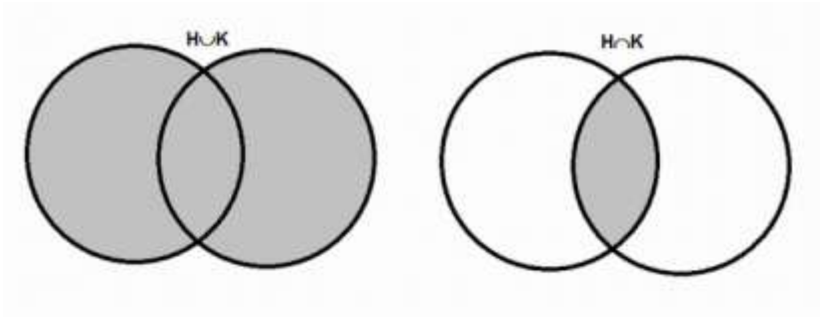
A halmazok metszésére teljesülnek a következő azonosságok:

Minden H, K, L halmazra

$H \cap K = K \cap H$ (kommutativitás),

$(H \cap K) \cap L = H \cap (K \cap L$ (asszociativitás),

$H \cap H = H$ (idempotencia).



3. ábra. Unió és metszet

Halmazok uniójára teljesülnek a következő tulajdonságok:

Minden H, K, L halmazra

$H \cup K = K \cup H$ (kommutativitás),

$(H \cup K) \cup L = H \cup (K \cup L)$ (asszociativitás),

$H \cup H = H$ (idempotencia).

Definíció: Két halmaz diszjunkt (idegen), ha metszetük az üres halmaz.

Jele: $\mathbf{H \cap K = \emptyset}$

Például: H:= {1, 2, 3} és K:= {4, 5, 6}, akkor $H \cap K = \emptyset$

A halmazok egyesítettje és metszete közötti kapcsolatra a következő azonosságok igazak:

Minden H, K, L halmazra

$H \cup (H \cap K) = H$, $H \cap (H \cup K) = H$ (abszorbciós, elnyelési tulajdonság),

$(H \cup K) \cap L = (H \cap L) \cup (K \cap L)$ (disztributivitás),

$(H \cap K) \cup L = (H \cup L) \cap (K \cup L)$ (disztributivitás).

Definíció: A **H** és a **K** halmaz különbségén értjük a **H** összes olyan elemeinek halmazát, amelyek **K**-ban nincsenek benne.

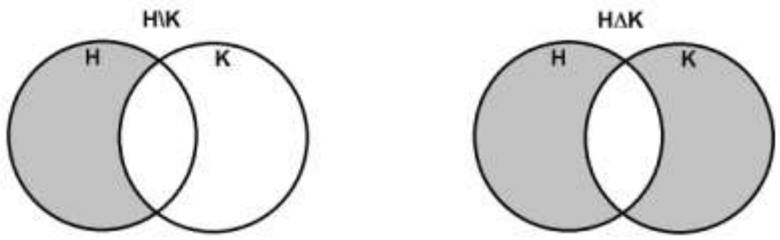
Jele: **H\K**

Például: H:= {1, 2, 4} és K:= {4, 5, 6}, akkor H\K:= {1, 2}

Definíció: A **H** és **K** halmazok szimmetrikus különbségén, amit **H∆K**-val jelölünk, a következőt értjük:

$H\Delta K = (H\setminus K) \cup (K\setminus H)$

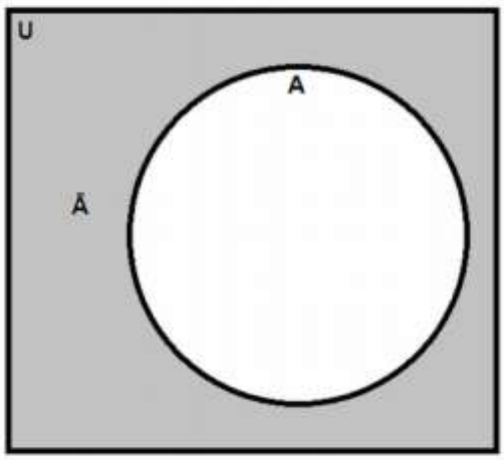
Például: H:= {1, 2, 4} és K:= {4, 5, 6}, akkor H∆K:= {1, 2, 5, 6}



4. ábra. Két halmaz különbsége és szimmetrikus különbsége

Definíció: Az **A** halmaznak az **U** univerzumra (alaphalmazra) vonatkozó komplementere (kiegészítő halmaza) az U\A halmaz.

Jele: **Ā**



5. ábra. Komplementer halmaz

Például: A:= {1, 2, 3, 4} és U:= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, akkor Ā:= {5, 6, 7, 8, 9, 10}

Definíció: A **H** és a **K** tetszőleges halmaz **H×K** Descartes-féle szorzata az (a,b) (a∈H, b∈K) rendezett elempárok halmaza, azaz H×K:= {(a,b)|a∈H, b∈K}

Például: H:= {1, 3} és K:= {4, 5, 6} akkor H×K:= {(1,4), (1,5), (1,6), (3,4), (3,5), (3,6)}

Definíció: A **H** halmaz (véges) számosságán az összes elemeinek számát érjük.

Jele: |**H**|

Például: H:= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, akkor |H| = 8

Például: H:= {1, 2, 4} és K:= {1, 2, 3, 5, 6, 7} és U:= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, akkor:

H∪K:= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, azaz |**H∪K**| = **7**

H∩K:= {1, 2}, azaz |**H∩K**| = **2**

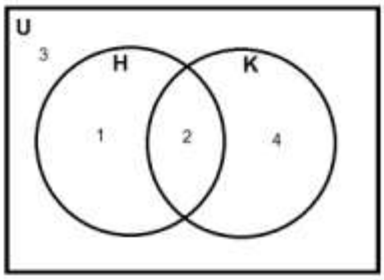
U\(H∪K):= {8, 9, 10}, azaz |**U\(H∪K)**| = **3**

Megfogalmazható szövegesen is a probléma: Ha egy csoport 10 főből áll, ebből 3-an beszélnek angolul, 6-an németül és mindösszesen 2-en mindkét nyelven, akkor hány fő nem beszél egyik nyelven sem?

Összefoglalva igazak a következő összefüggések:

|H∪K| = |H| + |K| – |H∩K|

|U| = |U\(H∪K)| + |H∪K|



6. ábra. Halmazok számossága

A halmazok bevezető ismeretei után már egyszerűbb feladat a számhalmazokkal való megismerkedés.

A számhalmazok szoros összefüggésben vannak a matematikai műveletekkel.

Érdekes kérdés, hogy egy matematikai művelet egy adott számhalmazon elvégezhető vagy kivezet abból, tehát számhalmazbővítést kell végrehajtani.

Milyen matematikai műveletekről is van szó?

Összeadás, kivonás, szorzás, osztás és gyökvonás műveletekről.

A természetes számok halmaza a pozitív egész számokból áll.

Jele: **N**:= {1, 2, 3, 4, ...}

A természetes számokra igazak a **Peano-féle axiómák**:

1. Az 1 természetes szám.
2. Minden természetes számnak van rákövetkezője.
3. Az 1 nem rákövetkezője egyetlen természetes számnak sem.
4. Csak egyenlő természetes számoknak lehetnek rákövetkezői.
5. Ha az 1 rendelkezik valamilyen T tulajdonsággal, s e tulajdonság egy n természetes számtól mindig öröklődik az n + 1-ikre, akkor minden természetes szám rendelkezik a T tulajdonsággal.
6. A természetes számok halmazán elvégezhető az összeadás művelet, nem vezet ki abból.

A természetes számok halmaza az összeadásra és a szorzásra zárt, a kivonás azonban kivezet a halmazból (például 2 – 3 = –1).

Az egész számok halmaza a természetes számokból, a zérusból és negatív egész számokból áll.

Jele: **Z**:= {…, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, …}

Az osztás, mint művelet kivezet az egész számok halmazából (például 2/4 = 0,5), ezért számkörbővítésre van szükség.

A racionális számok két egész szám hányadosaként előállítható számok.

Az irracionális számok nem állíthatók elő két egész szám hányadosaként.

Például: $\sqrt{2}$ (gyök alatt 2), π, e (a természetes alapú logaritmus alapszáma).

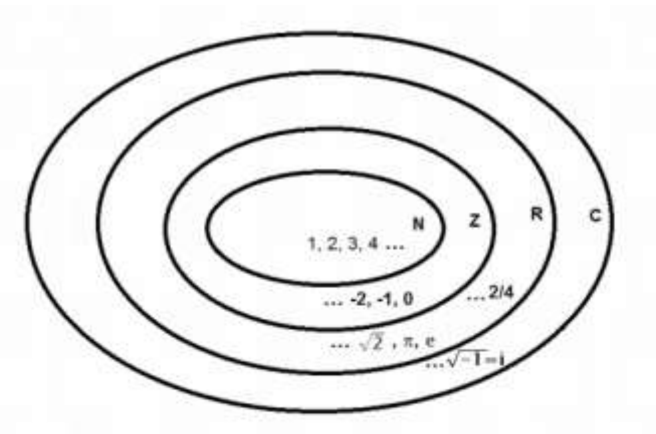
Valós számoknak nevezzük a racionális és az irracionális számok együttes halmazát.

Jele: **R**:= {racionális, irracionális számok}

A valós számok körében a gyökvonás műveletét abban az esetben nem lehet elvégezni, ha a négyzetgyökjel alatt negatív szám van.

A komplex számok körében értelmezve van a $\sqrt{-1} = \mathbf{i}$ (gyök alatt –1), így a számtesten a művelet elvégezhető.

Jele: **C**, ahol Z = a + b ∗ i alakban írjuk fel a komplex szám algebrai alakját.



7. ábra. Számhalmazok

2. Logikai alapműveletek

A logika hétköznapi jelentése a rendszeresség, következetesség.

Például: Ez logikus gondolatmenet volt.

A logika egy tudományszak elnevezése, melynek feladata a helyes következtetés, a fogalmának szabatos meghatározása, törvényeinek feltárása.

A modern formális logikát nevezik matematikai logikának vagy szimbolikus logikának.

Kijelentésen a kijelentő mondat formájában megfogalmazott szöveget értjük, amelyről eldönthető, hogy igaz vagy hamis.

Az **atomi kijelentés**ek tartalmának eldöntése nem a logika feladata.

Például:

Mária tud autót vezetni.

Mária elvégezte a gépjárművezető tanfolyamot.

Az atomi kijelentésekből **összetett kijelentés**ek képezhetők, amelyekről eldönthetjük, hogy igazak vagy hamisak.

Mária elvégezte a gépjárművezető tanfolyamot, és tud autót vezetni.

Ez az összetett kijelentés helyesnek érezhető.

Az **összetett formulák** négy logikai összekötőjel és két kvantor segítségével kaphatók.

Tárgynyelvi jel	Metanyelvi kiolvasás	Metanyelvi megnevezés
$\neg$	nem, nem igaz	negációjel
$\wedge$	és	konjunkciójel

$\vee$	vagy, legalább az egyik	diszjunkciójel
$\rightarrow$	ha … akkor	implikációjel
$\forall$	bármely/minden	univerzális kvantor
$\exists$	létezik/van olyan	egzisztenciális kvantor

Most következzenek a logikai műveletek. Mindegyik művelethez egy példa fogja segíteni Önt a megértés folyamatában.

Vegyünk példaként két kijelentést:

p: A lámpa ég.

q: A lift működik.

Negáció vagy tagadás: Egy kijelentés tagadását jelenti. Jele: **$\neg$q**

Példa: A lift nem működik.

Konjunkció: Két kijelentés összekapcsolása az „és” kötőszóval. Akkor igaz, ha mindkét kijelentés igaz. Jele: **p$\wedge$q**

Példa: A lámpa ég, és a lift működik.

A logikai műveletek eredményeit értéktáblázatban vagy igazságtáblázatban foglalhatjuk össze (i: igaz, h: hamis).

A konjunkció művelet igazságtáblázata:

p	q	p$\wedge$q
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	h

Diszjunkció: Két kijelentés összekapcsolása a „vagy” kötőszóval. Akkor és csak akkor hamis, ha mindkét kijelentés hamis. Jele: **p$\vee$q**

Példa: A lámpa ég, vagy a lift működik.

A diszjunkció művelet igazságtáblázata:

p	q	p$\vee$q
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	h

Implikáció: Ez a logikai művelet a „ha p, akkor q” típusú állításoknak felel meg. Az implikáció eredménye akkor és csakis akkor hamis, ha az első tagja igaz, a második tagja pedig hamis. Jele: **p→q**

Példa: A lámpa ég, akkor a lift működik.

Az implikáció művelet igazságtáblázata:

p	q	p→q
i	i	i
i	h	h
h	i	i
h	h	i

Ha az **A** és **B** formulák, akkor **A∧B**, **A∨B**, **A→B**, **⌉A** is formulák. Ha **A** egy formula, *x* tetszőleges (bármely fajtájú) változó, akkor az alábbiak is formulák:

∀ **x A**: minden x-re érvényes vagy rövidebben minden x A. (univerzális kvantor)

∃ **x A**: létezik olyan x, hogy A vagy rövidebben van olyan x, hogy A. (egzisztenciális kvantor)

Ezzel meglennék (a fenti összetett formulák táblázata), de még folytatnunk kell.

Léteznek egyéb logikai műveletek, amelyek megismerése hasznos lehet az Ön számára.

Kizáró vagy: Ennek a műveletnek eredménye akkor és csak akkor igaz, ha pontosan egyik tagja igaz. A két kijelentést kizáró értelmű vagy kötőszóval (avagy) kapcsoljuk össze.

Jele: **p∇q**

Példa: Vagy a lámpa ég, vagy a lift működik.

Egy másik példa, amely talán ismerősebb lehet. Alternatív kapcsolót használunk egy szobában, konyhában. Az egyiken felkapcsolom, a másikon pedig le.

Könnyen belátható, hogy azonos állásban a világítás le van kapcsolva.

A kizáró vagy művelet igazságtáblázata:

p	q	p∇q
i	i	h
i	h	i
h	i	i
h	h	h

Sem-sem művelet: Ennek a műveletnek eredménye akkor és csak akkor igaz, ha mindkét tagja hamis. Jele: **p||q**

Példa: Nem ég a lámpa, és a lift nem működik.

A sem-sem művelet igazságtáblázata:

p	q	p||q
i	i	h
i	h	h
h	i	h
h	h	i

Sheffer-féle művelet: Ennek a műveletnek eredménye akkor és csak akkor hamis, ha mindkét tagja igaz. Jele: **p|q**

Példa: Nem ég a lámpa, vagy a lift nem működik.

A Sheffer-féle művelet igazságtáblázata:

p	q	p|q
i	i	h
i	h	i
h	i	i
h	h	i

Ekvivalencia: Ennek a műveletnek eredménye akkor és csak akkor igaz, ha mindkét tagja azonos logikai értékű. Jele: **p↔q**

Példa: Nem igaz, hogy a lámpa ég és a lift nem működik.

Az ekvivalencia művelet igazságtáblázata:

p	q	p↔q
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	i

A programozásban, informatikai megfogalmazásokban is találkozhatunk logikai műveletekkel, „műveleti kapukkal" vagy programnyelvi logikai utasításokkal.

A műveletek a célszerűség kedvéért egy táblázatba foglalva lesznek megjelenítve.

Logikai művelet	**Programnyelvi utasítás**
nem	NOT
és	AND
vagy	OR
kizáró vagy	XOR

nem és	NAND
nem vagy	NOR

A példa 1 bájton ábrázolt bináris értékeken mutatja be a műveleteket.

1 bájton 2^8 különböző értéket tárolhatunk, így 0 és 255 közötti decimális értéket lehet binárisan leírni.

A = 17, azaz 00010001

B = 114, azaz 01110010

A	0	0	0	1	0	0	0	1	17
NOT A	1	1	1	0	1	1	1	0	238

A megoldás egyszerű, mivel a bitek értékét csak meg kell fordítanunk.

A NAND B = NOT (A AND B)

A NOR B = NOT (A OR B)

	bináris								decimális
A	0	0	0	1	0	0	0	1	17
B	0	1	1	1	0	0	1	0	114
A AND B	0	0	0	1	0	0	0	0	16
A OR B	0	1	1	1	0	0	1	1	115
A XOR B	0	1	1	0	0	0	1	1	99
A NAND B	1	1	1	0	1	1	1	1	239
A NOR B	1	0	0	0	1	1	0	0	140

A Boole-algebra alapjai:

George Boole (1815-1864) Lincoln városában (Angliában) született. 1854-ben jelent meg Boole alapvető műve, „A gondolkodás törvényeinek, a logika és a valószínűség matematikai alapjainak vizsgálata", amelyet ma a matematika klasszikus művei közé sorolnak. Az általa megfogalmazott matematikai struktúra indokolja a Boole-algebra elnevezést.

A halmazalgebra sok tekintetben különbözik a már ismert algebrai rendszerektől.

Megfogalmazhatjuk oly értelemben is, hogy a Boole-algebra az eddig ismertetett halmazelméleti és logikai ismeretek között felfedte és letisztázta a bennük rejlő kapcsolatot. Másképp fogalmazva teljesen mindegy, hogy halmazelméleti, illetve logikai műveletet vizsgálunk. Ezek hasonló matematikai tulajdonságokkal rendelkeznek, azaz a Boole-algebra nem más, mint a jelölésrendszer egyszerűsítése.

Definíció: A Boole-algebra olyan

B = < $\mathcal{B}$; + , · , ¯ , ⊃ > struktúra, ahol $\mathcal{B}$ = {α, β, γ, ... ;σ , ι} elemek halmaza, amelyben van kitüntetett elem **σ** és **ι**, és amelyen definiáltunk két binér műveletet: + (összeadást), · (szorzást); egy unér műveletet: ¯ (komplementum) és a ⊃ binér reláció, amely fennáll néhány (nem feltétlenül bármely) elempár között.

A definíciót nem kell megtanulnia, bármikor visszatérhet, visszalapozhat, és újra tanulmányozhatja.

Sokkal jobban bemutatják a Boole-algebra ellentmondás-mentességét a Boole-algebrai modellek.

Két szám Boole-aritmetikája:

B = < {0, 1}; + , · , ¯ , ⊃ > struktúra, amelynek a következők jellemzői:

A számok összeadására, szorzására teljesül:

+	0	1		·	0	1
0	0	1		0	0	0
1	1	1		1	0	1

A komplementumra teljesül:

$\overline{0}$	=	1	,	$\overline{1}$	=	0

A ⊃ relációra teljesül:

0 ⊃ 0, 1 ⊃ 0, 1 ⊃ 1

Így megkaptuk a Boole-algebra legegyszerűbb modelljét.

Most itt az ideje egy kis magyarázatnak. Az alábbi táblázatban lett összefoglalva a műveletek konverziója, megfeleltetése.

Boole-algebra	Halmazelmélet	Logika
Komplementum	Komplementer halmaz	Negáció
Összeadás	Unió	Vagy
Szorzás	Metszet	És
Tartalmazási reláció	Részhalmaz	–

3. Mátrixok és determinánsok

A **mátrix** olyan matematikai objektum, melyben a valós számok **n** számú sorban és **m** számú oszlopban vannak elrendezve. A mátrixok jelölésére nagybetűket használunk (**A, B** stb.), míg elemeit kisbetűkkel és két alsó indexszel (a_{ij}) jelöljük. A mátrixot **n**×**m**–es vagy **n**×**m** típusú mátrixnak nevezzük.

Jele: A = (a_{ij}), ahol i = 1..n, j = 1..m

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \cdots & \mathbf{a}_{1\mathbf{m}} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \cdots & \mathbf{a}_{2\mathbf{m}} \\ \vdots & & \ddots & \\ \mathbf{a}_{\mathbf{n}1} & \mathbf{a}_{\mathbf{n}2} & \cdots & \mathbf{a}_{\mathbf{nm}} \end{pmatrix}$$

8. ábra. Nxm típusú mátrix

<u>Műveletek mátrixokkal:</u>

Két mátrix egyenlő, ha ugyanolyan típusúak, és megfelelő elemeik megegyeznek.

Ha egy mátrixnak ugyannyi sora van, mint oszlopa, azaz n = m, akkor **négyzetes mátrix**nak nevezzük.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \cdots & \mathbf{a}_{1\mathbf{n}} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \cdots & \mathbf{a}_{2\mathbf{n}} \\ \vdots & & \ddots & \\ \mathbf{a}_{\mathbf{n}1} & \mathbf{a}_{\mathbf{n}2} & \cdots & \mathbf{a}_{\mathbf{nn}} \end{pmatrix}$$

9. ábra. Négyzetes mátrix

Ha egy mátrixnak egy sora vagy oszlopa van, azaz 1 × m–es vagy n × 1, akkor **sor–**, illetve **oszlopvektor**nak nevezzük.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_m \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

10. ábra. Sor–, oszlopvektor

Zérusmátrixnak nevezzük az olyan négyzetes mátrixot, amelynek minden eleme 0. Jele: **0**

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

11. ábra. Zérusmátrix

Egységmátrixnak nevezzük az olyan négyzetes mátrixot, amelynek a főátlójában 1–es, a többi helyen 0 áll. Jele: **E**

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

12. ábra. Egységmátrix

Ha két mátrix (A és B) azonos méretű, akkor létezik **C** = A + B **összegmátrix**, amelyet úgy kapunk meg, hogy a megfelelő elemeit összeadjuk ($c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$).

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \dots & \mathbf{a}_{1m} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \dots & \mathbf{a}_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \dots & \mathbf{a}_{nm} \end{pmatrix} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{11} & \mathbf{b}_{12} & \dots & \mathbf{b}_{1m} \\ \mathbf{b}_{21} & \mathbf{b}_{22} & \dots & \mathbf{b}_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \\ \mathbf{b}_{n1} & \mathbf{b}_{n2} & \dots & \mathbf{b}_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} + \mathbf{b}_{11} & \mathbf{a}_{12} + \mathbf{b}_{12} & \dots & \mathbf{a}_{1m} + \mathbf{b}_{1m} \\ \mathbf{a}_{21} + \mathbf{b}_{21} & \mathbf{a}_{22} + \mathbf{b}_{22} & \dots & \mathbf{a}_{2m} + \mathbf{b}_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \\ \mathbf{a}_{n1} + \mathbf{b}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} + \mathbf{b}_{n2} & \dots & \mathbf{a}_{nm} + \mathbf{b}_{nm} \end{pmatrix}$$

13. ábra. Összegmátrix

Egy A mátrix c konstanssal való szorzatát úgy határozzuk meg, hogy minden egyes elemét megszorozzuk ($b_{ij} = a_{ij} * c$) vele.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \cdots & \mathbf{a}_{1m} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \cdots & \mathbf{a}_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \cdots & \mathbf{a}_{nm} \end{pmatrix} * \mathbf{c}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} * \mathbf{c} & \mathbf{a}_{12} * \mathbf{c} & \cdots & \mathbf{a}_{1m} * \mathbf{c} \\ \mathbf{a}_{21} * \mathbf{c} & \mathbf{a}_{22} * \mathbf{c} & \cdots & \mathbf{a}_{2m} * \mathbf{c} \\ \vdots & & \ddots & \\ \mathbf{a}_{n1} * \mathbf{c} & \mathbf{a}_{n2} * \mathbf{c} & \cdots & \mathbf{a}_{nm} * \mathbf{c} \end{pmatrix}$$

14. ábra. Mátrix szorzása konstanssal

Ha egy **A** mátrix **n×m** (a_{ij}, i = 1..n, j = 1..m) típusú és egy **B** mátrix **m×p** (b_{jk}, j = 1..m, k = 1..p) típusú, akkor létezik az **n×p** típusú **C** szorzatmátrix.

C = A ∗ B (c_{ik}, i = 1..n, k = 1..p)

Például, ha az **A** mátrix 2 × 3 típusú, a **B** mátrix 3 × 2 típusú, akkor a szorzatmátrix (C = A ∗ B) 2 × 2 típusú lesz.

<u>A szorzatmátrix kiszámításának menete:</u>

$c_{11} = a_{11} * b_{11} + a_{12} * b_{21} + a_{13} * b_{31}$

$c_{12} = a_{11} * b_{12} + a_{12} * b_{22} + a_{13} * b_{32}$

$c_{21} = a_{21} * b_{11} + a_{22} * b_{21} + a_{23} * b_{31}$

$c_{22} = a_{21} * b_{12} + a_{22} * b_{22} + a_{23} * b_{32}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$A * B = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

15. ábra. Szorzatmátrix

Ha két mátrixnak létezik szorzata, és az eredmény az egységmátrix, akkor azt a **mátrix inverzének** nevezzük.

Jele: $\mathbf{A}^{-1}$, $E = A * A^{-1}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

16. ábra. Inverzmátrix

Az **A** négyzetes ($n \times n$ típusú) mátrixból |**A**| determináns képezhető, amely bármely sora vagy oszlopa alapján kifejthető, hozzárendelhető egy konkrét érték.

Az A ($n \times n$ típusú) mátrixból képzett |**A**| determinánst *n-ed rendű* determinánsnak nevezzük.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

17. ábra. Determináns

Ha n = 2, akkor másodrendű determinánsról beszélünk.

Ha n = 3, akkor harmadrendű determinánsról beszélünk.

A determináns kiszámításának szabályai:

- A determináns bármely sora vagy oszlopa alapján kifejthető.
- A determináns egyenlő transzponáltjával (tükrözöttjével).
- Ha egy determináns főátlója felett minden elem zérus, akkor a determináns a főátlóban lévő elemek szorzata.
- Ha egy determináns minden eleme zérus, akkor a determináns értéke is zérus.
- Ha egy determináns valamely sorának minden egyes elemét megszorozzuk c-vel, akkor a determináns értéke is szorzódik c-vel.
- Ha egy determináns két sorát felcseréljük, akkor a determináns előjelet vált.
- Ha egy determinánsban két sor elemenként megegyezik, akkor a determináns zérus.
- A determináns értéke nem változik, ha valamely sorához hozzáadjuk egy másik sorának többszörösét.

Másodrendű determináns kiszámítása:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} \end{vmatrix}$$

18. ábra. Másodrendű determináns

$|A| = a_{11} * a_{22} - a_{12} * a_{21}$

Harmadrendű determináns kiszámítása:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} \end{vmatrix}$$

19. ábra. Harmadrendű determináns

a) adjungált determinások képzésével

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} \end{vmatrix} = \mathbf{a}_{11} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} \\ \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} \end{vmatrix} - \mathbf{a}_{12} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{23} \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{33} \end{vmatrix} + \mathbf{a}_{13} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{32} \end{vmatrix}$$

20. ábra. Adjungálás

$|A| = a_{11} * (a_{22} * a_{33} - a_{23} * a_{32}) - a_{12} * (a_{21} * a_{33} - a_{23} * a_{31}) + a_{13} * (a_{21} * a_{32} - a_{22} * a_{31})$

b) Sarrus-szabály alkalmazásával

Egészítsük ki a determinánst az első két oszlopával, majd a főátlóban lévő és a vele párhuzamos átlókban lévő elemek szorzatának összegéből, vonjuk le a mellékátlóban lévő és a vele párhuzamos átlókban lévő elemek szorzatának összegét!

$$|\mathbf{A}| = \left|\begin{matrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{32} \end{matrix}$$

21. ábra. Sarrus-szabály

$|A| = (a_{11} * a_{22} * a_{33}) + (a_{12} * a_{23} * a_{31}) + (a_{13} * a_{21} * a_{32}) - (a_{13} * a_{22} * a_{31}) - (a_{11} * a_{23} * a_{32}) - (a_{12} * a_{21} * a_{33})$

4. Lineáris egyenletrendszerek megoldása

<u>Definíció:</u> A **lineáris egyenletrendszer** tetszőleges

$a_{11} * x_1 + a_{12} * x_2 + \ldots + a_{1n} * x_n = c_1$

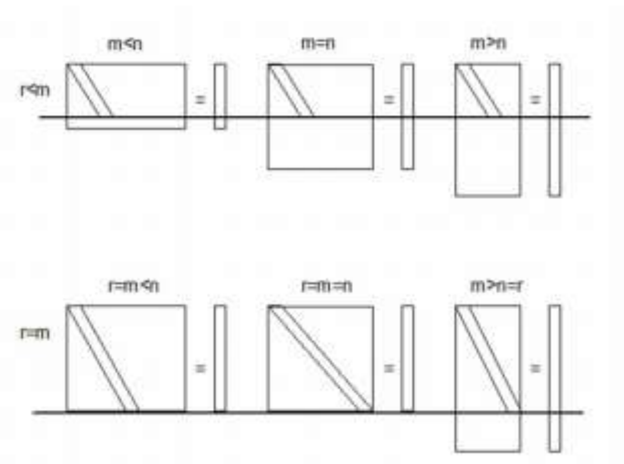
$a_{12} * x_1 + a_{22} * x_2 + \ldots + a_{2n} * x_n = c_2$

…

$a_{m1} * x_1 + a_{m2} * x_2 + \ldots + a_{mn} * x_n = c_m$

alakban vehető fel, ahol *m,n* (0-tól különböző) természetes szám, az a_{ik} együtthatók (nem mind zérus) és c_i konstansok, továbbá x_k-k az ismeretlenek ($i = 1..m,\ k = 1..n$).

<u>Definíció:</u> **A lineáris egyenletrendszer akkor és csakis akkor oldható meg**, ha a hozzá tartozó (egyik) trapéz alakú lineáris egyenletrendszer azon egyenleteiben, amelyeknek bal oldalán csupa zérus áll, a jobb oldali konstansok is zérussal egyenlők.



22. ábra. A lineáris egyenletrendszer típusai

<u>Definíció:</u> Ha a lineáris egyenletrendszer megoldható, akkor **megoldásai az együtthatókat tartalmazó testben vannak**, továbbá

1. ha n = r, akkor a lineáris egyenletrendszernek egyetlen megoldása van;

2. ha pedig n > r, akkor a lineáris egyenletrendszernek (n – r) számú szabadon választható értéktől függő, végtelen sok megoldása van.

A lineáris egyenletrendszert megoldhatjuk az ismeretlenek fokozatos kiküszöbölésének módszerével. A módszer lényege, hogy a lineáris egyenletrendszer első sorának megfelelő számszorosát kivonjuk az alatta lévő sorokból, majd addig folytatjuk az eljárást, míg trapéz alakú lineáris egyenletrendszert kapunk.

Tekintsük át az első példán a lineáris egyenletrendszer megoldásának módszerét!

$x_1 + x_2 - 3x_3 = -1$

$2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$

$x_1 + x_2 + x_3 = 3$

$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1$

Az első egyenlet kétszeresét vonjuk ki a második egyenletből, illetve az első egyenletet a harmadikból és a negyedikből!

$x_1 + x_2 - 3x_3 = -1$

$- x_2 + 4x_3 = 3$

$4x_3 = 4$

$x_2 = 2$

Cseréjük fel a második és negyedik egyenletet, és adjuk hozzá a negyedikhez!

$x_1 + x_2 - 3x_3 = -1$

$x_2 = 2$

$4x_3 = 4$

$4x_3 = 5$

A harmadik egyenletet vonjuk ki a negyedikből!

$x_1 + x_2 - 3x_3 = -1$

$x_2 = 2$

$4x_3 = 4$

$0 = 1$

Mivel **0 = 1 (?),** ez nem igaz, tehát ellentmondásra jutottunk, így ennek a lineáris egyenletrendszernek nincs megoldása!

Tekintsük át a második példán a lineáris egyenletrendszer megoldásának módszerét!

$2x_1 + x_2 + x_3 = 2$

$x_1 + 3x_2 + x_3 = 5$

$x_1 + x_2 + 5x_3 = -7$

$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14$

Cseréljük fel az egyenleteket!

$x_1 + 3x_2 + x_3 = 5$

$x_1 + x_2 + 5x_3 = -7$

$2x_1 + x_2 + x_3 = 2$

$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14$

Az első egyenlet alkalmas többszöröseinek levonásával megkapjuk a következő egyenletrendszert:

$x_1 + 3x_2 + x_3 = 5$

$-2x_2 + 4x_3 = -12$

$-5x_2 - x_3 = -8$

$-3x_2 - 5x_3 = 4$

A második egyenletet osszuk le –2–vel, majd alkalmas többszöröseinek levonásával megkapjuk a következő egyenletrendszert:

$x_1 + 3x_2 + x_3 = 5$

$x_2 - 2x_3 = 6$

$-11x_3 = 22$

$7x_3 = -14$

A harmadik egyenletet osszuk le –11–gyel, majd alkalmas többszöröseinek levonásával megkapjuk a következő egyenletrendszert:

$x_1 + 3x_2 + x_3 = 5$

$x_2 - 2x_3 = 6$

$x_3 = -2$

$0 = 0$

Mivel nem jutottunk ellentmondásra ($0 = 0$), ezért a lineáris egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van: $\mathbf{x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = -2.}$

<u>Definíció:</u> **Szabályos**nak nevezünk egy lineáris egyenletrendszert, ha az egyenletek száma megegyezik az ismeretlenek számával, és az egyenletrendszer determinánsa zérustól különböző.

$a_{11} * x_1 + a_{12} * x_2 + \ldots + a_{1n} * x_n = c_1$

$a_{12} * x_1 + a_{22} * x_2 + \ldots + a_{2n} * x_n = c_2$

…

$a_{n1} * x_1 + a_{n2} * x_2 + \ldots + a_{nn} * x_n = c_n$

<u>Definíció:</u> A lineáris egyenletrendszer együtthatóiból felírható determinánst D-vel jelöljük, s a **lineáris egyenletrendszer determinánsának** nevezzük.

$$\mathbf{D} = |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \cdots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & & \mathbf{a}_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \cdots & \mathbf{a}_{nn} \end{vmatrix}$$

23. ábra. Lineáris egyenletrendszer determinánsa

<u>Definíció:</u> A lineáris egyenletrendszer determinánsának megfelelő oszlopába behelyettesíthető a c_i konstansok vektora, így megkapjuk a **konstans determinánsok**at (D_1, D_2, … D_n).

$$\mathbf{D}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{a}_{12} & \cdots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{c}_2 & \mathbf{a}_{22} & & \mathbf{a}_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{c}_n & \mathbf{a}_{n2} & \cdots & \mathbf{a}_{nn} \end{vmatrix}, \ldots, \mathbf{D}_n = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \cdots & \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & & \mathbf{c}_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \cdots & \mathbf{c}_n \end{vmatrix}$$

24. ábra. Konstansok determinánsa

<u>Cramer szabálya:</u> Ha a lineáris egyenletrendszer szabályos, akkor a lineáris egyenletrendszer megoldható, és pontosan egy megoldása van. A lineáris egyenletrendszer megoldását mutatja a következő ábra.

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, X_n = \frac{D_n}{D}$$

25. ábra. Cramer szabálya

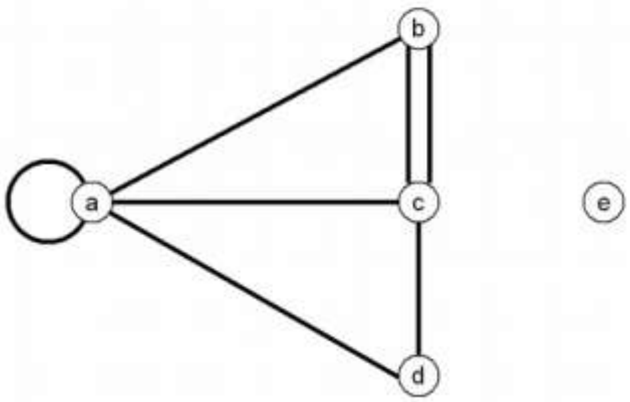
5. A gráfelmélet alapjai

Gráfon pontoknak és egyszerű íveknek olyan rendszerét értjük, amelyben minden ív a rendszer két pontját köti össze, és minden pont legalább egy ívnek a végpontja. A pontokat a gráf **szögpont**jainak, az íveket a gráf **él**einek nevezzük.

Definíció: A G = (V,E) párt gráfnak nevezzük, ahol V a pontok, E pedig az élek halmaza.

Pontok halmaza: V = {a, b, c, d, e}.

Élek halmaza: E = {(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (b,a), (b,c), (b,c), (c,a), (c,b), (c,b), (c,d), (c,d), (d,a), (d,c)}



26. ábra. Gráf

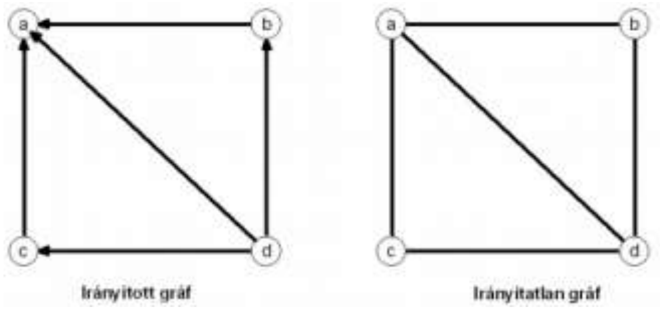
Definíció: Egy szögpontból kiinduló élek számát a **szögpont fokszámának**, a szögpontok fokszámának maximumát a **gráf fokszámának** nevezzük.

A G (V,E) gráf szögpontjából kiinduló élek számát (26. ábra) **dG(i)**-vel jelöljük (ahol i = a, b, … n).

Így a *26. ábrán* lévő gráf szögpontjaiból kiinduló élek száma, illetve a gráf fokszáma a következő:

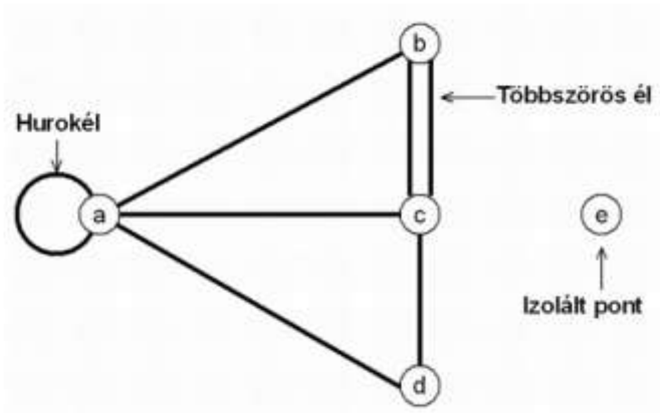
$d_G(a) = 4$, $d_G(b) = 3$, $d_G(c) = 4$, , $d_G(d) = 2$ és ezek maximuma, a gráf fokszáma $d_G = 4$.

Definíció: Ha egy G (V,E) gráf éleinek megadjuk az irányát, akkor **irányított** gráfnak nevezzük, egyébként **irányítatlan** gráfnak nevezzük.



27. ábra. Gráfok

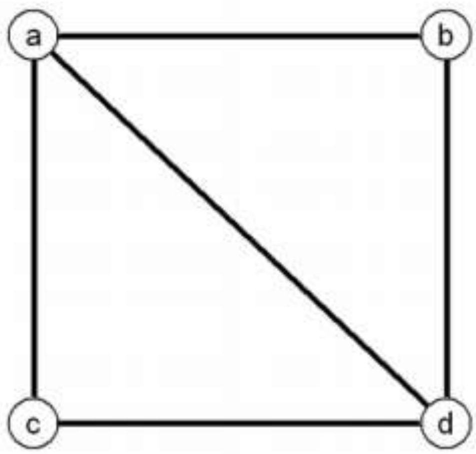
Egyszerű gráfnak nevezzük azt a G (V,E) gráfot, amelynek nincs hurokéle, nincs többszörös éle, és nem tartalmaz izolált pontot.



28. ábra. Összetett gráf

Teljes gráfnak nevezzük azt a G (V,E) gráfot, amelynek bármely két különböző pontját él köti össze.

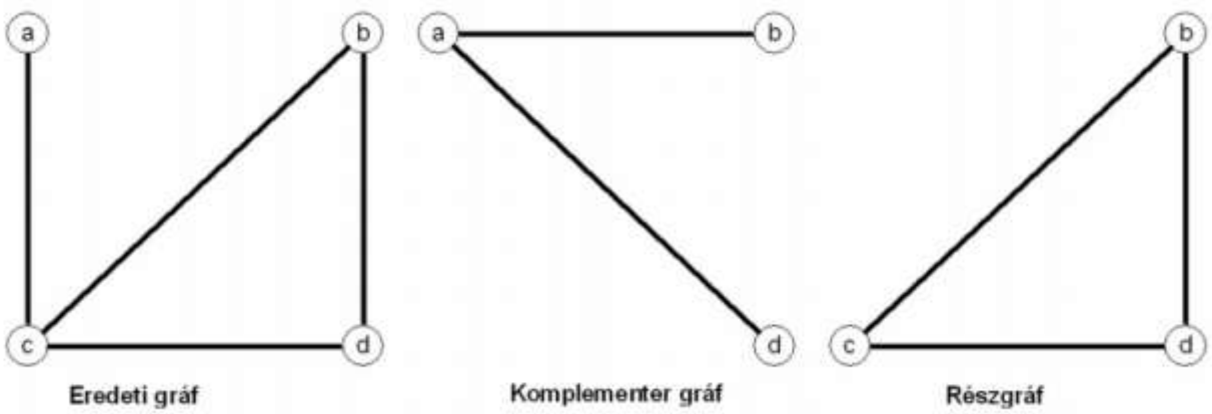
Az n pontú teljes gráf éleinek száma $|E| = n * (n - 1)/2$.



29. ábra. Teljes gráf

Komplementer gráf: Ha egy teljes gráfot kiegészítünk teljes gráffá, és ebből az eredeti gráf éleit töröljük, akkor az így nyert gráfot az eredeti gráf komplementer (kiegészítő) gráfjának nevezzük.

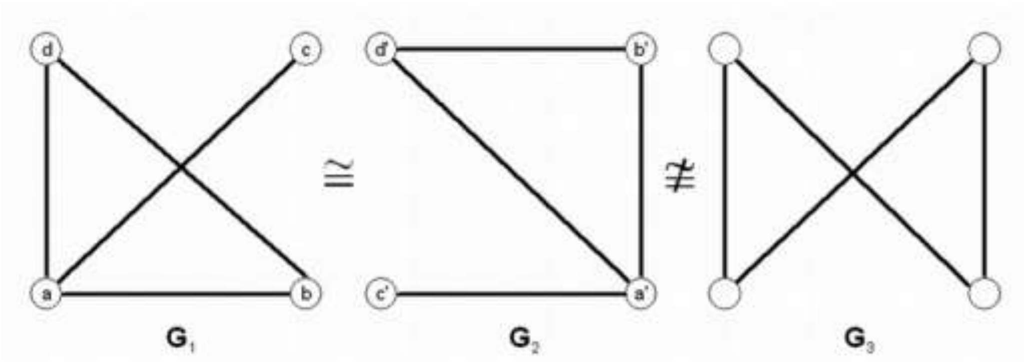
Részgráf: Ha egy gráf bizonyos éleit és pontjait (az illeszkedő élekkel együtt) töröljük, akkor az így nyert gráfot az eredeti gráf részgráfjának nevezzük.



30. ábra. Kiegészítő gráf és részgráf

Izomorf gráf: A G (V,E) és a G'(V',E') gráfok izomorfak, ha van olyan kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, hogy ha a G-ben egy csúcshoz egy él illeszkedik, akkor a G'-ben is igaz, hogy a megfelelő csúcshoz a megfelelő él illeszkedik.

Jele: G ≅ G' (ellenkezője G ≇ G', azaz a két gráf nem izomorf).



31. ábra. Izomorfia

Ha egy G(V,E) gráf valamely pontjából kiindulva, az éleken haladva eljuthatunk egy másik pontjába, akkor egy élsorozatot (e_1, e_2, e_3, …, e_n) kapunk, és **sétának** nevezzük.

Az (i) pontbeli sétát **útnak** nevezzük, ha a séta minden érintett pontja különböző.

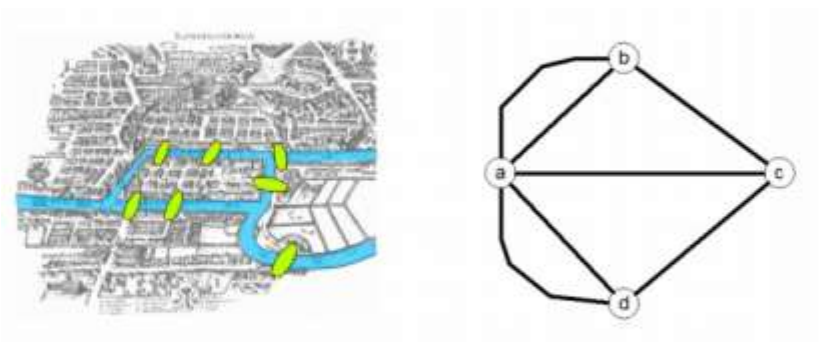
Ha az (i) pontbeli út kezdő- és végpontja azonos, akkor **körnek** nevezzük.

Hamilton-útnak nevezzük azt az utat, amely a gráf valamennyi csúcspontján pontosan egyszer halad át. **Hamilton-kör**ről beszélünk, ha a Hamilton-út kezdő- és végpontja azonos.

Euler-vonalnak (út) nevezzük azt az utat, amely a gráf valamennyi élén pontosan egyszer halad át. **Euler-kör**ről beszélünk, ha az Euler-vonal kezdő- és végpontja azonos.

Az egyik leghíresebb gráfelméleti probléma „a königsbergi hidak problémája"

Königsberg városban hét híd ívelt át a várost átszelő folyón úgy, hogy ezek a folyó két szigetét is érintették. A kérdés, hogy végig lehet-e menni az összes hídon úgy, hogy mindegyiken csak egyszer haladjunk át, és egyúttal visszaérjünk a kiindulópontba.

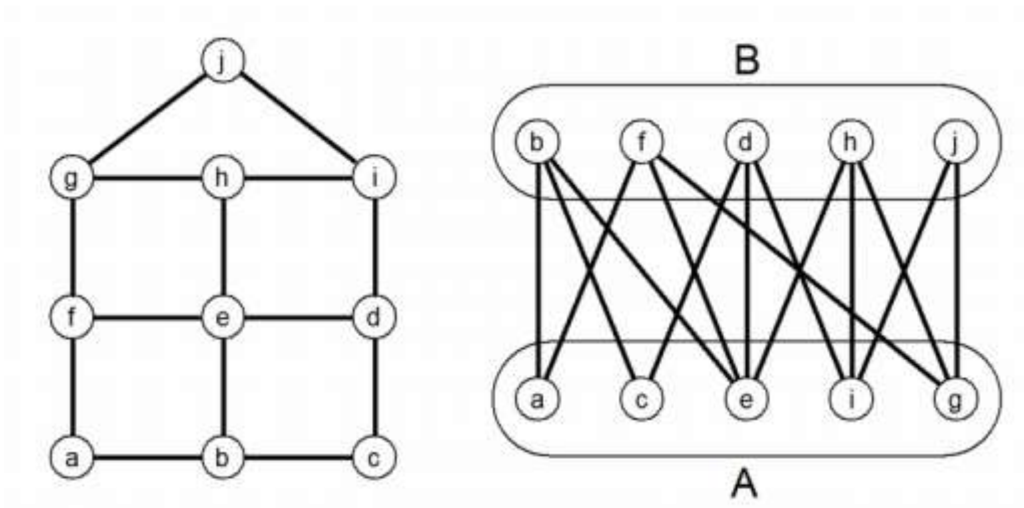


32. ábra. A königsbergi hidak problémája[1]

[1] Forrás: http://hu.wikipedia.org/wiki/Königsbergi_hidak (2010.08.30.)

Euler bebizonyította, hogy a königsbergi hidakat nem lehet úgy bejárni, hogy mindegyiken csak egyszer haladjunk át, és egyúttal visszaérjünk a kiindulópontba.

Definíció: A G(V,E) irányítatlan gráfot **páros gráf**nak nevezzük, ha a V csúcspontok két diszjunkt A és B halmazra oszthatók, úgy, hogy G minden élének az egyik végpontja A-ban, a másik végpontja B-ben van.



33. ábra. Páros gráf

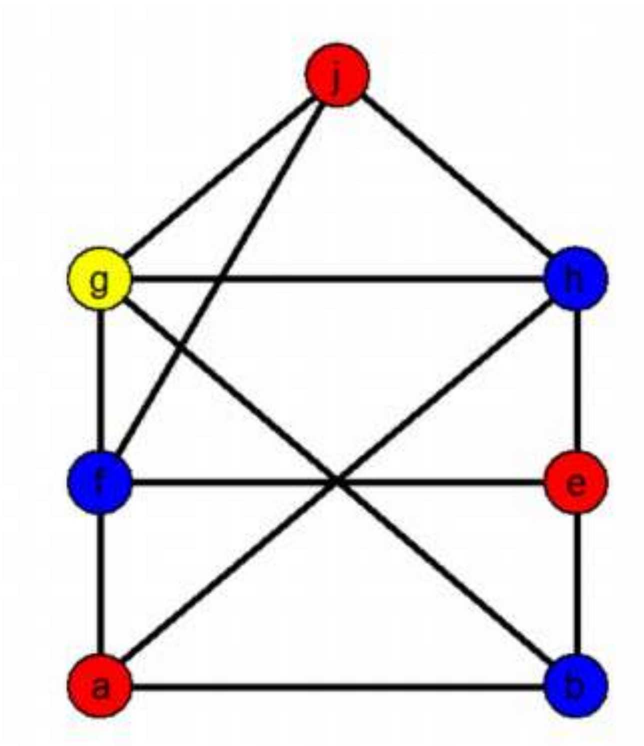
Definíció: Egy G (V,E) **gráf jó színezésén** a csúcsainak olyan színezését értjük, ahol az élekkel összekötött csúcsok eltérő színeket kapnak.

A gráfok színezését a térképészetben is hasznosíthatják. Például az egymással szomszédos megyéket Magyarország „vaktérképén" különböző színekkel jelölhetjük.

Domborzatok árnyalásánál is megfigyelhetjük ezt a megoldást.

Négyszínsejtés: Minden hurokmentes síkgráf **4 színnel jól színezhető**.

A sejtés (tétel) bizonyításától itt eltekintenénk.



34. ábra. Gráf színezése

6. Alapstatisztikai módszerek

A **statisztika** egy tudományos módszertan, amely a valóság tömör, számszerű jellemzésére szolgál.

A vizsgálat tárgyát képező egyedek összességét **statisztikai sokaság**nak (populáció) nevezzük.

A statisztikai sokaság egyedeinek közös és megkülönböztető tulajdonságait **statisztikai ismérv**nek nevezzük.

<u>Statisztikai ismérvek:</u>

- Területi ismérvek
- Időbeli ismérvek
- Minőségi ismérvek
- Mennyiségi ismérvek

Bizonyos szabályok alapján minden ismérv lehetséges változatai számértékké alakíthatók. A számokkal való jellemzést **mérés**nek nevezzük.

<u>Mérési szintek:</u>

- Nominális skála (adóosztály, rendszám stb.)
- Ordinális skála (katonai rangfokozatok, osztályzatok stb.)
- Intervallumskála (tengerszint feletti magasság, hőmérséklet stb.)

- Arányskála (hosszúság mérése, súly meghatározása stb.)

A **statisztikai sor** a sokaság egyetlen ismérv szerinti jellemzését adja. A statisztikai sorok rendszerezése hagyományosan a vizsgált ismérv típusa szerint történik.

A csoportosítósor általános sémája a következő:

Osztály	Gyakoriság
C_1	f_1
C_2	f_2
…	…
C_k	f_k
Összesen	N

Az osztály lehet ismérvváltozat, ismérvérték, ismérvváltozatok osztálya vagy intervallum.

A csoportosító sort **gyakorisági sor**nak is nevezzük.

A középérték azonos fajta számszerű adatok közös jellemzője.

Középértékek:

- Számított középértékek, átlagok (aritmetikai, harmonikus, geometriai, kvadratikus)
- Helyzeti középértékek (Módusz, Medián)

Az *aritmetikai átlag* az a szám, amelyet az átlagolandó értékek helyébe téve azok összege nem változik.

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

35. ábra. Aritmetikai átlag

A *harmonikus átlag* az a szám, amelyet az átlagolandó értékek helyébe téve azok reciprokjainak összege nem változik.

$$\overline{X}_h = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = n * \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \right)$$

36. ábra. Harmonikus átlag

A *geometriai átlag* az a szám, amelyet az átlagolandó értékek helyébe téve azok szorzata nem változik.

$$\overline{X}_g = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \sqrt[n]{x_1 * x_2 * \cdots * x_n}$$

37. ábra. Geometriai átlag

A *kvadratikus átlag* az a szám, amelynek négyzetével helyettesítve az átlagolandó értékek négyzeteit azok összege nem változik.

$$\overline{X}_q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}$$

38. ábra. Kvadratikus átlag

A **medián** a rangsorba rendezett ismérvértékek közül a középső, az (n + 1)/2-edik sorszámú érték. Ha n párosa, akkor a medián a két középső tag egyszerű számtani (aritmetikai) átlaga.

Jele: Me

A **módusz** a rangsorba rendezett ismérvértékek közül a leggyakrabban előforduló tipikus érték.

Jele: Mo

Az adatok átlag körüli elhelyezkedését, a szóródást is mérni kell.

A **szóródás terjedelme** R (Range) az az intervallumhossz, amelyen belül az értékek elhelyezkednek.

Jele: $R = x_{max} - x_{min}$

Az átlagtól vett eltérések négyzeteinek átlaga a szórásnégyzet (variancia), ennek négyzetgyöke adja a **szórás** értékét.

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

39. ábra. Szórás

A **torzítótényező** hatása annál kisebb, minél nagyobb a minta elemszáma. A szórás számításánál ezért n – 1 darabszámmal számolunk, és így kapjuk meg a **korrigált szórás**t.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n-1}{n} = 1$$

40. ábra. Torzítótényező

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}}$$

41. ábra. Korrigált szórás

Adott egy 20 fős, azonos korú felnőttekből álló csoport. Felmértük a testmagasságukat és testsúlyukat. A testmagasságukból statisztikát szeretnénk számítani (aritmetikai átlag, módusz, medián, szóródás terjedelme, korrigált szórás).

A számításban (ellenőrzésben) segítséget nyújthat az Excel vagy egyéb táblázatkezelő program.

<u>A minta a következő:</u> 165, 156, 180, 168, 178, 172, 175, 178, 180, 175, 180, 185, 167, 167, 185, 186, 190, 177, 177, 195

Az első feladat az adatsor rendezése és a darabszám meghatározása.

<u>A rendezett minta:</u> 156, 165, 167, 167, 168, 172, 175, 175, 177, 177, 178, 178, 180, 180, 180, 185, 185, 186, 190, 195

Darabszám, azaz n = 20.

A szóródás terjedelme, azaz R = 195 – 156 = 39.

A medián a két középső 10., illetve 11. átlaga, mivel n páros szám.

Me = (177 + 178)/2 = 177,5

A módusz a leggyakoribb elem, azaz 156 1 db, 165 1 db, ..., 178 2 db, 180 3 db, 185 2 db stb., mivel a 180 szerepel a legtöbbször, ezért az a leggyakoribb elem ebben a mintában.

Mo = 180

Átlagszámításnál összeadjuk az értékeket, és elosztjuk a darabszámmal.

x = (156 + 165 +...+ 190 + 195)/20 = 3536/20 = 176,8

<u>A korrigált szórásszámítás menete:</u>

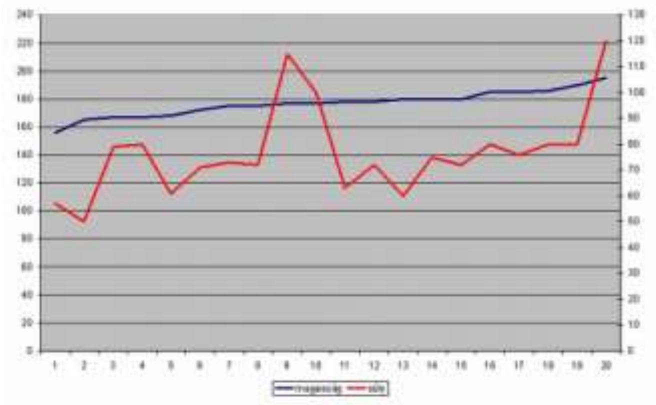
$S^2 = [(156 - 176,8)^2 + (165 - 176,8)^2 + \ldots + (190 - 176,8)^2 + (195 - 176,8)^2]/19 = (-20,80^2 + -11,80^2 + \ldots + 13,20^2 + 18,20^2)/19 = (432,64 + 139,24 + \ldots + 174,24 + 331,24)/19 = 1629,20/19 = 85,75$

S = 9,26

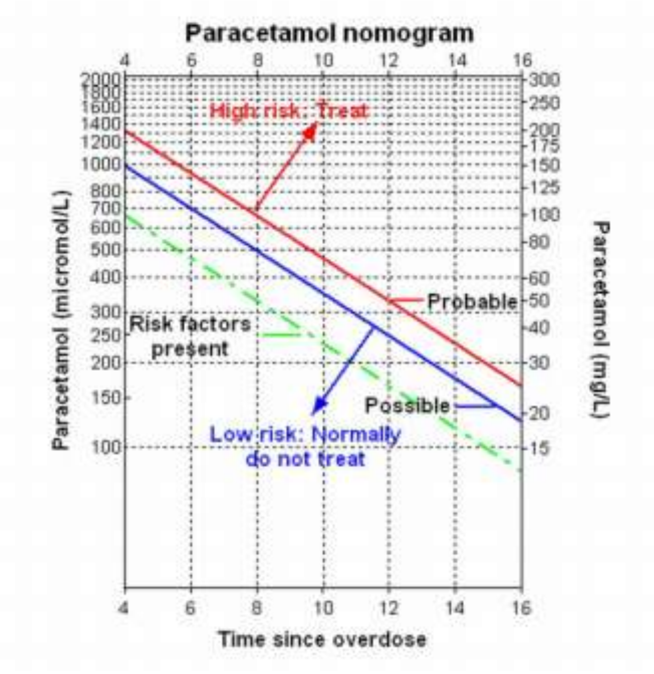
A statisztika mintaértékeit grafikusan is megjeleníthetjük.

A **diagram** általában az információk szimbolikus kétdimenziós geometriai ábrázolása, lehet azonban ez háromdimenziós ábrázolás is.

A **nomogram** több változós függvények síkbeli ábrázolására és az egymáshoz tartozó értékrendszerek megállapítására szolgáló ábra.



42. ábra. Diagram



43. ábra. Nomogram[2]

TANULÁSIRÁNYÍTÓ

1. Oldja meg a feladatokat a kijelölt helyen!

Adott két halmaz, például H:= {1, 3, 4} és K:= {1, 3, 6, 7}. Adjuk meg a két halmaz unióját, illetve metszetét!

H∪K:= ____

H∩K:= ____

Adott két halmaz, például H:= {1, 2, 4} és K:= {1, 2, 3, 5}. Adjuk meg a két halmaz különbségét és szimmetrikus különbségét!

H\K:= ____

HΔK:= ____

[2] Forrás: http://curriculum.toxicology.wikispaces.net/2.1.1.1+Acetaminophen (2010.09.01.)

Adott egy halmaz és alaphalmaza, például A:= {2, 3, 6} és U:= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}. Adjuk meg az A kiegészítő halmazát az U-ra!

Ā:= ____

Adott két halmaz, például H:= {2, 5} és K:= {1, 2, 3}. Adjuk meg a két halmaz Descartes-féle szorzatát!

H×K:= ____

2. Oldja meg a halmazok számosságára vonatkozó feladatot!

Egy 20 fős osztályban 12 fő tud sakkozni, 7 fő dámázni, és 4 fő tud mindösszesen sakkozni és dámázni is. Arra keressük a választ, hogy hány fő nem űzi egyik játékot sem.

____

____

____

____

3. Oldja meg a számok számhalmazokba foglalására vonatkozó feladatot!

Adott egy olyan halmaz, amely különböző számokat tartalmaz. A:= {-4; 0; 11; 4i-2; e; 4,14; π, -45,5; 150; -3i; 5; -100; 78,9}. Helyezzük el a számokat a megfelelő számhalmazba!

N:= ____

Z:= ____

R:= ____

C:= ____

4. Oldjon meg **logikai** műveleteket!

<u>Adott két logikai kijelentés:</u>

p: A lámpa ég.

q: A lift működik.

Értékeljük ki ítélőtábla segítségével a következő összetett logikai műveleteket, és adjuk meg a mondatszerű megfogalmazását is! **$q \rightarrow p$, $\urcorner q \wedge p$**

1. kijelentés $q \rightarrow p$: ____________________

2. kijelentés $\urcorner q \wedge p$: ____________________

1. kijelentés, azaz a $q \rightarrow p$ kijelentés ítélőtáblája:

q	p	q→p
i	i	
i	h	
h	i	
h	h	

2. kijelentés, azaz a $\urcorner q \wedge p$ kijelentés ítélőtáblája:

p	q	⌉q	⌉q∧p
i	i		
i	h		
h	i		
h	h		

Tekintsük át bináris értékeken a logikai műveletek végrehajtását!

Adott két decimális szám, A=50, B=96. Egy bájton szeretnénk ezeket ábrázolni, majd elvégezni néhány logikai műveletet.

A = ______________________________

B = ______________________________

NOT B = ______________________________

A AND B = ______________________________

A OR B = ______________________________

A XOR B = ______________________________

A NAND B = ______________________________

A NOR B = ______________________________

Lapozzon vissza, és ismételje át a Boole-algebráról szóló részt! Ne feledje, hogy ne törekedjék arra, hogy szó szerint tanulja meg a tananyagot!

5. Oldjon meg **mátrix** feladatokat! Lapozzon vissza a mátrix műveleteinek leírásához!

Adott két mátrix (A és B), amelyek azonos méretűek, és meg szeretnénk határozni az összegüket.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

44. ábra. A és B mátrix összege

Adott egy A mátrix és egy c = 2 konstans, amelynek a szorzatát szeretnénk meghatározni.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} * 2$$

45. ábra. Mátrix szorzása konstanssal

Adott két mátrix (A és B), melyeknek létezik szorzatuk, és ezt szeretnénk meghatározni.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

46. ábra. Mátrixok szorzata

6. Tekintse át a determinánsok kiszámításának lehetőségeit!

Ha a kifejtés során valamilyen nehézsége támadna, akkor lapozzon vissza, és tanulmányozza át a determinánsok kiszámítására vonatkozó részt!

Ki szeretnénk számítani az alábbi determinánsokat.

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 51 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad |\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} \quad |\mathbf{C}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 11 & 7 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

47. ábra. Determinánsok kifejtése

7. Ismételje át a lineáris egyenletrendszerről tanultakat! Szükség esetén lapozzon vissza a megfelelő fejezethez!

Adott a következő lineáris egyenletrendszer. Az ismeretlenek fokozatos kiküszöbölésének módszerével határozzuk meg a megoldásait!

$2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 4$

$3x_1 - x_2 - 4x_3 = -2$

$4x_1 + x_2 - 3x_3 = 2$

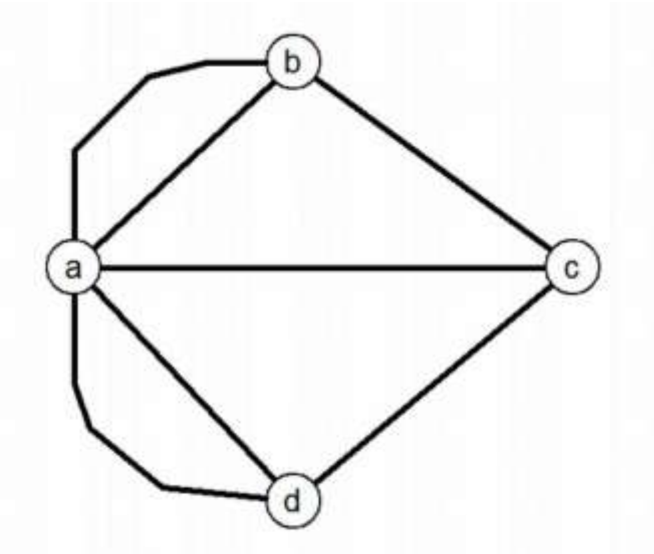
8. Oldjon meg gráfokhoz kapcsolódó feladatot! Szükség esetén lapozzon vissza a megfelelő fejezethez!

Adott egy G gráf. Válaszoljuk meg a következő kérdéseket, majd színezzük ki a gráfot!

Mennyi a gráf fokszáma? D_G =____________________

A gráf páros-e, miért? ____________________

Adjunk meg egy élsorozatot, amely kör! ____________________



48. ábra. G gráf

9. Ismételje át a statisztikai számítások alapjait! Szükség esetén lapozzon vissza a megfelelő fejezethez!

Adott egy 20 fős, azonos korú felnőttekből álló csoport. Felmértük a testmagasságukat és testsúlyukat. A testsúlyukból statisztikát szeretnénk számítani (aritmetikai átlag, módusz, medián, szóródás terjedelme, korrigált szórás)!

Testsúlyok: 57, 50, 79, 80, 61, 71, 73, 72, 115, 100, 63, 72, 60, 75, 72, 80, 76, 80, 80, 120 ___________________

A rendezett minta: ____

____

Darabszám, azaz n = ____

Szóródás terjedelme, azaz R = ____

Átlag, azaz x = ____

Módusz, azaz Mo = ____

Medián, azaz Me = ____

Korrigált szórás, azaz S = ____

____

A számításban (ellenőrzésben) segítséget nyújthat az Excel vagy egyéb táblázatkezelő program.

ÖNELLENŐRZŐ FELADATOK

1. feladat

Adott két halmaz A:= {2, 3, 5, 8} és B:= {1, 3, 8, 9, 10}, valamint az alaphalmaz U:= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}. Adja meg a két halmazra vonatkozóan a következő műveletek eredményeit! A megoldást Venn-diagramon is ábrázolja!

$A \cup B :=$

$A \cap B :=$

$A \setminus B :=$

$A \Delta B :=$

$\bar{A} :=$

2. feladat

Adott két logikai kijelentés p (A lámpa ég) és q (A lift működik). A következő összetett logikai műveletnek adja meg a mondatszerű megfogalmazását, majd értékelje ki ítélőtábla segítségével!

$\neg p \rightarrow q$

p	$\neg p$	q	$\neg p \rightarrow q$
i		i	
i		h	
h		i	
h		h	

3. feladat

Adott két decimális szám A = 95, és B = 109. Töltse ki az alábbi táblázatot!

	bináris								decimális
A									95
B									109
NOT B									

A AND B									
A OR B									
A XOR B									
B NAND A									
B NOR A									

4. feladat

Számítsa ki az A és B mátrix szorzatát!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} * \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

49. ábra. A és B mátrix szorzata

5. feladat

Fejtse ki a következő determinánsokat!

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 11 \\ 4 & -2 & 22 \end{vmatrix} \quad |\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad |\mathbf{C}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

50. ábra. Determinánsok

6. feladat

Oldja meg a lineáris egyenletrendszert az ismeretlenek fokozatos kiküszöbölésének módszerével!

$x_1 - x_3 + x_4 = 3$

$-2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1$

$3x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 7$

$x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 11$

7. feladat

Oldja meg a lineáris egyenletrendszert Cramer szabályának alkalmazásával!

$3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2$

$x_1 - 2x_2 - x_3 = -1$

$-x_1 - x_2 + 2x_3 = -4$

8. feladat

Színezzük ki Magyarország térképét a gráfelmelét alapján!

Hány színnel színezhető? ____

51. ábra. Magyarország vaktérképe

9. feladat

Adott egy 15 fős csoport, életkoraik: 70, 59, 60, 32, 26, 32, 32, 34, 36, 50, 52, 18, 26, 44, 50.

Határozzuk meg a következő statisztikai mérőszámokat!

n =

R =

x =

Mo =

Me =

S =

MEGOLDÁSOK

1. feladat

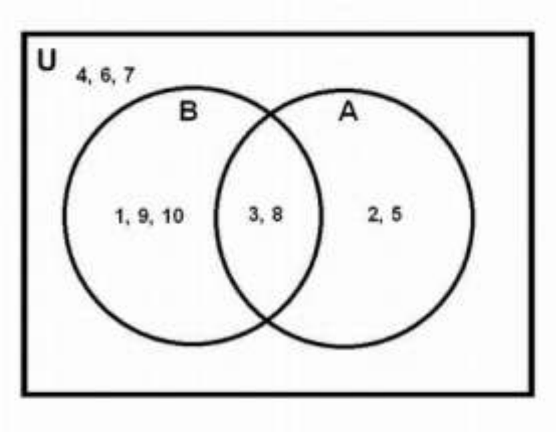
$A \cup B := \{1, 2, 3, 5, 8, 9, 10\}$

$A \cap B := \{3, 8\}$

$B \setminus A := \{1, 9, 10\}$

$A \Delta B := \{1, 2, 5, 9, 10\}$

$\bar{A} := \{1, 4, 6, 7, 9, 10\}$



52. ábra. Ábrázolás Venn-diagramon

2. feladat

Ha a lámpa nem ég, akkor a lift működik.

p	$\neg p$	q	$\neg p \rightarrow q$
i	h	i	i
i	h	h	i
h	i	i	i
h	i	h	h

3. feladat

	bináris								decimális
A	0	1	0	1	1	1	1	1	95
B	0	1	1	0	1	1	0	1	109
NOT B	1	0	0	1	0	0	1	0	146

A AND B	0	1	0	0	1	1	0	1	77
A OR B	0	1	1	1	1	1	1	1	127
A XOR B	0	1	1	1	0	0	1	0	114
B NAND A	0	0	0	1	0	0	1	0	18
B NOR A	1	1	0	1	1	1	1	1	223

4. feladat

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 9 & 14 & 8 \\ 17 & 16 & 2 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

53. ábra. Szorzatmátrix

5. feladat

$|A| = 0$, $|B| = 6$, $|C| = -10$

6. feladat

$x_1 = -8$, $x_2 = -26$, $x_3 = 19$, $x_4 = 30$.

7. feladat

$x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$.

8. feladat

4 színnel színezhető.

54. ábra. Magyarország térképének színezése

9. feladat

18, 26, 26, 32, 32, 32, 34, 36, 44, 50, 50, 52, 59, 60, 70

N = 15, R = 52, x = 41,4, Mo = 32, Me = 36, S = 14,91

IRODALOMJEGYZÉK

FELHASZNÁLT IRODALOM

Dr. Nagy Tamás: Matematika. Miskolc, 1997.

Dr. Pelle Béla: Geometria, Tankönyvkiadó, 1979.

Dr. Sashalminé Kelemen Éva: A matematikai logika és a halmazelmélet elemei. EKTF Líceum Kiadó, 1996.

Dr. Szendrei János: Algebra és számelmélet. Tankönyvkiadó, 1978.

Hajnal Imre – dr. Nemetz Tibor – dr. Pintér Lajos: Matematika III. (fakultatív B változat). Nemzeti Tankönyvkiadó, 1994.

Horváth Gézáné dr.: Alkalmazott statisztika I. Külkereskedelmi Főiskola, 1994.

AJÁNLOTT IRODALOM

Bokor József: Oktatási segédlet az Üzleti matematika és Matematika tantárgyakhoz, Booklands 2000 Kft., 2001.

A(z) 1155-06 modul 016 számú szakmai tankönyvi tartalomeleme felhasználható az alábbi szakképesítésekhez:

A szakképesítés OKJ azonosító száma:	A szakképesítés megnevezése
54-481-01-1000-00-00	CAD-CAM informatikus
54-481-04-0010-54-01	Gazdasági informatikus
54-481-04-0010-54-02	Infostruktúra menedzser
54-481-04-0010-54-03	Ipari informatikai technikus
54-481-04-0010-54-04	Műszaki informatikus
54-481-04-0010-54-05	Távközlési informatikus
54-481-04-0010-54-06	Telekommunikációs informatikus
54-481-04-0010-54-07	Térinformatikus

A szakmai tankönyvi tartalomelem feldolgozásához ajánlott óraszám: 15 óra

A kiadvány az Új Magyarország Fejlesztési Terv
TÁMOP 2.2.1 08/1-2008-0002 „A képzés minőségének és tartalmának fejlesztése” keretében készült.
A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

Kiadja a Nemzeti Szakképzési és Felnőttképzési Intézet
1085 Budapest, Baross u. 52.
Telefon: (1) 210-1065, Fax: (1) 210-1063

Felelős kiadó:
Nagy László főigazgató